KESTABILAN MODEL LINIER KUADRATIK DENGAN PERSAMAAN *LYAPUNOV* PADA WAKTU KONTINU

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

INDRISMAN LAIYA
11354103331

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

KESTABILAN MODEL LINIER KUADRATIK DENGAN PERSAMAAN *LYAPUNOV* PADA WAKTU KONTINU

TUGAS AKHIR

Oleh:

<u>INDRISMAN LAIYA</u>
1135410333

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, 04 Agustus 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
<u>Ari Pani Desvina, M. Sc.</u>	<u>Nilwan Andiraja, M.Sc.</u>
NIP. 19811225 200604 2 003	NIP.19840803 201101 1 005

LEMBAR PENGESAHAN

KESTABILAN MODEL LINIER KUADRATIK DENGAN PERSAMAAN *LYAPUNOV* PADA WAKTU KONTINU

TUGAS AKHIR

Oleh:

INDRISMAN LAIYA
11354103331

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 04 Agustus 2020

Pekanbaru, 04 Agustus 2020
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 1992203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Dr. Rado Yendra, M.Sc**
Sekretaris	**: Nilwan Andiraja, M.Sc.**
Anggota I	**: Wartono, M.Sc.**
Anggota II	**: Irma Suryani, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 04 Agustus 2020

Yang membuat pernyataan,

INDRISMAN LAIYA

11354103331

LEMBAR PERSEMBAHAN

"Sesungguhnya Allha tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri."

(Qs. Ar-Ara'd : 11)

***

Dengan mengucapkan Alhamdulillah, puji dan syukur kepada ALLAH SWT yang telah melimpahkan rahmat, karunia dan kemudahan yang diberikan sehingga karya ini dapat terselesaikan, serta salawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW. Karya ini kupersembahkan sebagai tanda sayang dan terimakasih kepada:

Kepada Kedua Orang tua ku Bapak Alm. A.Laiya dan Ibu Jasnimar yang sangat saya sayangi dan tiada pernah hentinya selama ini memberiku limpahan kasih sayang yang tulus, bimbingan, nasehat, arahan, pengorbanan yang tak tergantikan hingga ananda kuat menjalani rintangan hidup ini & dorongan serta doa yang selalu dipanjatkan setiap waktu untuk keberhasilan dan kesuksesanku.

***

Karya ini aku kubingkiskan untuk:

Adik-adik ku (Eko Saputra Laiya, Meilin Tri Sadewa Laiya dan Juwita Putri Laiya) dan Semua Pihak yang telah memberi motivasi, dukungan, mengibur dan menyemangati setiap harinya.

Keluarga Besar ku terimakasih banyak atas Doa, nasehat, dukungan, motivasi yang tak pernah putus-putusnya.

Pembimbingku Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc yang telah membimbing, memberikan arahan dan motivasi serta meluangkan banyak waktu dalam pembuatan skripsi saya ini.

KESTABILAN MODEL LINIER KUADRATIK DENGAN PERSAMAAN LYAPUNOV PADA WAKTU KONTINU

INDRISMAN LAIYA
11354103331

Tanggal Sidang : 04 Agustus 2020
Periode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang persoalan menganalisa kestabilan model linier kuadratik dengan Metode Lypunov pada waktu kontinu, menggunakan persamaan diferensial sistem dinamik dan fungsi tujuan. Kemudian dibentuk Persamaan Alajabar Riccati dan didapatkan fungsi kendali pertama dan kendali kedua. Dari fungsi tersebut disubtitusikan ke persamaan diferensial sistem dinamik awal. Berdasarakan contoh 4.1 dan contoh 4.2, hasilnya sistem tidak stabil.

Kata kunci: *Kestabilan, Kuadratik, Lyapunov, Kendali, Riccati.*

UIN SUSKA RIAU

THE STABILITY OF THE QUADRATIC LINEAR MODEL WITH THE LYAPUNOV EQUATION AT CONTINUOUS TIME

INTAN PERTIWI
11254203193

Date of Final Exam : *August,* 4^{th} *2020*
Graduation Ceremony Period :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final project discusses the problem of analyzing a quadratic linear stability model with the Lypunov method at continuous time, using a system of dynamic differential equations and objective functions. Then the Algebraic Equations and the first control and the second control. From this function is substituted for the initial dynamic system differential equation. Based on Example 4.1 and Example 4.2, the result is an unstable system.

keywords: *Stability , Quadratic ,Lyapunov, Control, , Riccati,.*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillahirobbil'alamin segala puji syukur kepada Allah *Subhanahu Wata'ala* karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul "Kestabilan Model Linier Kuadratik Dengan Persamaan *Lyapunov* Pada Waktu Kontinu". Shalawat beserta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad *Shallallahu Alaihi Wassalam* yang telah memberikan petunjuk bagi seluruh umat manusia, Semoga dengan senantiasa bersholawat kita mendapatkan syafa'atnya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Satra 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesian Tugas Akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, perhatian serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama kali penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta almarhum Bapak (A. Laiya) yang telah menanamkan dari kecil nilai agama, kerja keras, semangat, keberanian dalam menjalani kehidupan ini. Semoga Allah *Subhanahu Wata'ala* memberikan papa tempat terindah disurga, Aamiin. Serta Ibu (Jasnimar) yang telah memberikan kasih sayang yang tersirat dalam setiap senyuman serta do'a yang tak pernah tinggal disetiap sujud semoga Allah *Subhanahu Wata'ala* memberikan kebahagian dunia dan akhirat, Aamiin. Dan ketiga adik-adik saya (Eko, Meylin, dan Juwita). Ucapan terimakasih selanjutnya Penulis Ucapkan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina,M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, memberikan arahan dan bimbingan dengan sabar serta ikhlas selama penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Bapak Dr. Rado Yendra, M.Sc selaku Ketua Sidang yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
7. Bapak Wartono, M.Sc selaku Penguji I yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
8. Ibu Irma Suryani, M.Sc selaku Penguji II yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
9. Ibu Sri Basriati, M.Sc Selaku Pembimbing Akademik yang telah memberi dukungan dan arahan selama perkuliahan.
10. Semua Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang banyak memberi masukan dan motivasi.
11. Semua Admin Jurusan Matematika di Fakultas yang telah banyak membantu penulis.
12. Teman-teman angakatan Matematika ’13 terkhusus kelas B serta kepada Senior dan Junior Matematika yang telah memberikan pelajaran maupun pengajaran, arahan serta motivasi.
13. Semua Pihak yang tidak saya sebutkan semua namanya yang telah membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 04 Agustus 2020

Indrisman Laiya

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{x}$: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\dot{\boldsymbol{x}}$: $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt})$

$\bar{x}$: Titik ekuilibirium.

$\boldsymbol{\lambda}$: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ Nilai eigen.

$x(t)$: Vektor state

$u(t)$: Vektor kendali.

t : Waktu

A : Matriks nxn

X, S : Matriks simetri nxn

$\boldsymbol{f}$: $(f_1, f_2, \dots, f_n)$

$\mathbb{R}$: Himpunan bilangan Real.

$\forall$: Untuk setiap

∞ : Ketakhinggaan

ε : Epsilon

$\int$: Integral Tak Tentu

$\sum$: Jumlahan

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori kendali salah satu ilmu dalam matematika yang menarik untuk dibahas, salah satu permasalahan penting dalam teori kendali yakni bagaimana keadaan sistem, apakah sistem tersebut merupakan sistem yang stabil atau tidak stabil. Penelitian yang telah membahas tentang teori kendali adalah Oktavia Love Lina (2014) yang membahas penggunaan metode *Lyapunov* untuk menguji kestabilan sistem linier tanpa kendali. Pada penelitian tersebut diberikan nilai titik ekuilibrium, selanjutnya dari titik ekuilibrium tersebut akan ditentukan kestabilan dengan mengaitkan solusi persamaan *Lyapunov* dengan titik ekuilibrium.

Penelitian lain yang juga dilakukan oleh Wahyudi (2015) membahas kestabilan sistem kendali lingkar terbuka linier kuadratik untuk waktu tak berhingga. Dalam jurnalnya dibahas mengenai persamaan linier kuadratik untuk waktu tak berhingga dengan menggunakan lingkar terbuka untuk dua kendali. Kemudian dari fungsi dinamik dan fungsi tujuan maka didapat persamaan Hamilton, selanjutnya dari persamaan tersebut dibentuk persamaan aljabar Riccati maka didapat solusinya. Dari persamaan aljabar Riccati maka dapat dibentuk fungsi kendali untuk lingkar terbuka.

Selanjutnya penelitian oleh Zulfikar (2016) yang membahas persamaan aljabar Riccati pada masalah kendali dengan waktu tak berhingga. Pada penelitian tersebut diberikan persamaan diferensial dan fungsi tujuan untuk dua kendali pada waktu tak berhingga. Kemudian berdasarkan persamaan diferensial dinamik fungsi dan fungsi tujuan tersebut maka dapat dibuat persamaan Hamilton. Selanjutnya dari persamaan tersebut dibentuk persamaan Riccati untuk masing-masing kendali. Setelah itu solusi dari persamaan diferensial Riccati yang terbentuk digunakan untuk menentukan fungsi kendali baru setelah dianalisa kestabilannya.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk membahas penelitian jurnal Oktavia Love (2014) , Wahyudi (2015) dan Zulfikar (2016) dengan penelitian persamaan *Lyapunov* untuk menganalisa persamaan dinamik dengan waktu kontinu. Sehingga pada tugas akhir ini penulis mengambil judul "**Kestabilan Model Linier Kuadratik Dengan Persamaan *Lyapunov* Pada Waktu Kontinu**".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan fungsi kendali pertama dan fungsi kendali kedua untuk persamaan *Lyapunov* pada waktu kontinu ?.
1. Bagaimana menganalisa kestabilan sistem linier kuadratik pada persamaan *Lyapunov* ?.

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan malasah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Sistem yang dibahas pada tugas akhir adalah loop tertutup untuk waktu kontinu.
2. Fungsi tujuan yang berbentuk kuadratik waktu tak berhingga.
3. Persamaan dinamik berbentuk persamaan diferinsial orde satu.
4. Persamaan dinamik dan fungsi tujuan berbentuk persamaan kuadratik dua kendali.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penilitian ini adalah sebagai berikut:

2. Mendapatkan fungsi kendali pertama dan kedua untuk persamaan *Lyapunov* pada waktu kontinu.
3. Memperoleh hasil analisa kestabilan sistem linier kuadratik pada persamaan *Lyapunov*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Penilitian ini memberikan wawasan kepada keilmuan Matematika dan menambah referensi mahasiswa untuk menyusun tugas akhir.
2. Memberikan kontribusi bagi pembaca untuk membantu mempelajari dan memperdalam masalah persamaan lyapunov dalam waktu kontinu.

3. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah teori kendali.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penilitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan tentang yang mendasari pemecahan masalah-masalah yang berhubungan dengan judul Tugas Akhir.

BAB III METODELOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang metode-metode yang digunakan dalam penelitian agar memperoleh hasil yang dibutuhkan dalam penulisan Tugas Akhir.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan pemaparan cara-cara untuk mendapatkan hasil peneilitian Tugas Akhir.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran Tugas Akhir.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk Sistem Persaman Linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

dari Sistem Persamaan (2.1) dibentuk matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka dari Persamaan (2.2) dinotasikan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan diferensial dari matriks $[dx_1 \quad dx_2 \quad \dots \quad dx_n]^T$ dinotasikan dengan dx.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A \tag{2.3}$$

Untuk memahami Persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ untuk $f_1 = x_1{+}5x_2$ dan $f_2 = 9x_1{+}5x_2$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1{+}5x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(9x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(9x_1 + 5x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \\ &= A\end{aligned}$$

Selanjutnya, Jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y} \tag{2.4}$$

Dan selanjutnya berlaku hubungan,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y} \tag{2.5}$$

Untuk memahami Persamaan (2.5), maka diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} x_1 & + & 5x_2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= (x_1 + 5x_2)y_1 + (2x_1 + 3x_2)y_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_1y_1 + 5x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1y_1 + 5x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1y_1 + 5x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & + & 2y_2 \\ 5y_1 & + & 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= A^T\boldsymbol{y}$$

Jika matriks A adalah simestri dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka berlaku :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.6}$$

Untuk memahami Persamaan (2.6), maka diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.3 :

Tentukan $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 8x_1 & + & 5x_2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(8x_1 + 5x_2) + x_2(5x_1 + 6x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(8x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 6x_2^2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(8x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 6x_2^2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(8x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 6x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(8x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(8x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16x_1 & + & 10x_2 \\ 10x_1 & + & 12x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 8x_1 & + & 5x_2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2A\boldsymbol{x}$$

2.2 Bentuk kuadratik

Bagian ini akan dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks yaitu :

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk persamaan kuadratik dengan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan A adalah matrik simetri dengan entri matrik A yaitu $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Bentuk kuadratik Persamaan (2.7) dapat diubah ke bentuk sebagai berikut :

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \tag{2.8}$$

Selanjutnya untuk memahami bentuk kuadratik Persamaan (2.8), maka diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.4 :

Jabarkan notasi sigma berikut menjadi bentuk kuadratik :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j$$

Penyelesaian :

Notasi sigma tersebut dapat diuraikan dengan langkah berikut :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j &= \sum_{i=1}^{2}\{c_{i1}x_ix_1 + c_{i2}x_ix_2\} \\
&= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 \\
&= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 \\
&= (x_1c_{11} + x_2c_{21})x_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})x_2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} & x_1c_{12} + x_2c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menentukan apakah bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ dikatakan definit positif atau definit negatif, dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks A. Hal ini sebagaimana dijelaskan oleh Lewis (1995) yaitu jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua i, i=1,2, $\dots, n$
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua i, i=1,2, $\dots, n$
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua i, i=1,2, $\dots, n$
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua i, i=1,2, $\dots, n$.

Jika tidak memenuhi syarat diatas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *undefinite.*

Contoh 2.5:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, akan ditentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian :

Untuk menentukan sifat definit matriks A dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} = 0$$
$$(\lambda - 3)(\lambda - 7) - 0 = 0$$
$$(\lambda - 3)(\lambda - 7) = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_2 = 3 \text{ dan } \lambda_2 = 7$$

Dari matriks diatas didapat, $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 7$, karena $\lambda_i > 0$ untuk $i = 1,2$ maka dapat disimpulkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks definit positif.

2.3 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium, sebagai berikut :

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik equilibirium, digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut :

Defenisi 2.3 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$.

Contoh 2.6:

Tentukan kestabilan dari persamaan dinamik $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Pada contoh 2.6 diatas, dapat dinyatakan sebagai berikut $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = -x_1$ dan $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = -2x_2$. Selanjutnya ditentukan solusi untuk masing-masing bagian sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -dt$$

$$\ln x_1 = -t + c$$

Karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga

$$\ln x_1 - c = -t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -t$$

$$x_1 = x_1(0).\, e^{-t}$$

Untuk $t \to \infty$ maka

$$x_1(t) = x_1(0).\, e^{-\infty}$$

$$x_1(t) \to 0$$

Kemudian,

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

Karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga

$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$x_2 = x_2(0).e^{-2t}$$

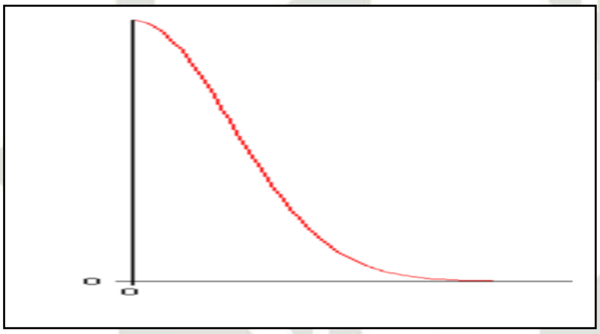
Untuk $t \to \infty$ maka

$$x_2(t) = x_2(0).e^{-2\infty}$$

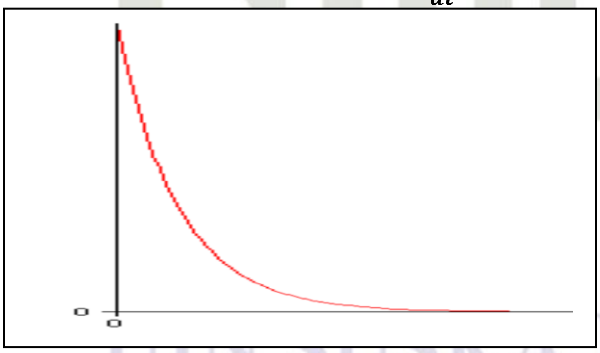
$$x_2(t)$$

Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

Untuk memahami contoh 2.6, maka diberikan grafik sebagai berikut:



Gambar 2.1 Grafik fungsi $\frac{dx_1}{dt} = -x_1$



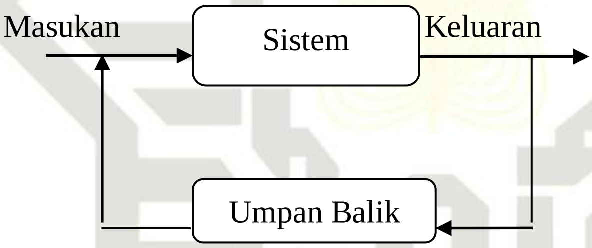
Gambar 2.2 Grafik fungsi $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$

2.4 Sistem Kendali Optimal

Menurut Ganda Samosir (2004) Sistem kendali memiliki dua bagian yaitu Sistem kendali lingkar terbuka *(open loop)* dan Sistem kendali lingkar tertutup (*closed loop*). Sistem kendali lingkar terbuka *(open loop)* adalah sistem kontrol dimana keluaran tidak memberikan efek terhadap besaran masukan, sehingga variabel yang dikontrol tidak dapat dibandingkan terhadap harga yang diinginkan.

Gambar 2.4 Sistem Loop Terbuka

Sedangkan sistem kendali lingkar tertutup (*closed loop*) adalah sistem pengendalian dimana besaran keluaran memberi efek terhadap besaran masukan sehingga besaran yang dikontrol dapat dibandingkan terhadap harga yang diinginkan melalui alat pencatat.



Gambar 2.5 Sistem Loop Tertutup

2.5 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah untuk kendali lingkar terbuka untuk waktu tak berhingga.

2.5.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \qquad (2.9)$$

dengan $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor state dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah fungsi kendali. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan :

$$J(t_0) = \phi\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt \qquad (2.10)$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi ojektif.

Persamaan Hamilton : $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \lambda^T(t) f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ (2.11)

Persamaan state : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \;\; t \geq t_0$ (2.12)

Persamaan konstate : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)}{\partial \boldsymbol{x}} \;\; t \leq T_f$ (2.13)

Persamaan stasionar : $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ (2.14)

2.5.2 Kendali Optimal Linier Kuadratik Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik dari masalah kendali lingkar tertutup didefinisikan persamaan sistem linier untuk waktu t.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \qquad (2.15)$$

dengan $A \,\epsilon\, \mathbb{R}^{n \times n}, B_i\, \mathbb{R}^{n \times m}$, $\boldsymbol{x}(t) \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ dan kendali input $\boldsymbol{u}(t) \,\epsilon\, \mathbb{R}^m$, dan meminimalkan fungsi objektif yaitu :

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(T_f) S(T_f) \boldsymbol{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt \qquad (2.16)$$

dengan t_0 waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definit positif selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x}^T (T_f) S(T_f) \boldsymbol{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $\boldsymbol{x}(t)$. Diasumsikan juga R adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} > 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan persamaan Lyapunov sekaligus vektor kendali yang diperlukan untuk meninimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan (2.15)-(2.16) diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut.

Persamaan Hamilton : $H(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}).$ (2.17)

Persamaan state : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t).$ (2.18)

Persamaan kostate : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = Q\boldsymbol{x}(t) + A^T\ \boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.19)

Persamaan stasioner : $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = R\boldsymbol{u}(t) + \ B^T\ \boldsymbol{\lambda}(t) = 0.$ (2.20)

Berdasarkan Persamaan (2.19) diperoleh $\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.21)

Selanjutnya Persamaan (2.21) disubtitusikan ke Persamaan (2.18) maka diperoleh :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t). \tag{2.22}$$

dengan matriks koefesien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\boldsymbol{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, state akhir $\boldsymbol{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\boldsymbol{x}(t_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu :

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial \phi(T_f)}{\partial \boldsymbol{x}(T_f)} = S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) \tag{2.23}$$

untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diamsumsikan $\boldsymbol{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.23) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga :

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{2.24}$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.24) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}}$. Kemudian dari Persamaan (2.22) diperoleh :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^TS\boldsymbol{x}) \tag{2.25}$$

Dari Persamaan (2.13) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$. Selanjutnya, disubtitusikan Persamaan (2.25) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh:

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^TS\boldsymbol{x})$$

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda},\ \textit{dimana: } \boldsymbol{\lambda} = S\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^TS$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q)\boldsymbol{x}.$$

$$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q$$

$$\dot{S} = -A^T S - SA + SBR^{-1}B^T S - Q. \tag{2.26}$$

Karena Persamaan (2.26) memenuhi untuk setiap waktu t.

Jika S adalah solusi untuk Persamaan diferensial Riccati (2.26) maka dapat dibentuk fungsi kendali.

$$\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T S(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{2.27}$$

Selanjutnya untuk menganalisa kestabilan persamaan diferensial dinamik maka disubtitusikan (2.27) ke Persamaan (2.15), diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\left(-R^{-1}B^T S(t)\boldsymbol{x}(t)\right),$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - BR^{-1}B^T S(t))\boldsymbol{x}(t) \tag{2.28}$$

2.6 Kestabilan Metode *Lyapunov*

Pada bagian ini dibahas masalah analisa kestabilan menggunakan metode *Lyapunov*.

Teorema 2.1 (Ogata, 1995) Diberikan sistem persamaan waktu kontinu

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2.29}$$

dengan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor *state* dan A adalah matriks non singular $n \times n$, untuk titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat P simetri dan defenit positif yang memenuhi :

$$A^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}A = -\boldsymbol{Q} \tag{2.30}$$

dengan matriks Q adalah matriks simetri dan definit positif.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.7:

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem pada contoh 2.7, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut :

$$A^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}A = -\boldsymbol{Q}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4p_{12} & 2p_{11} - p_{12} - 2p_{22} \\ 2p_{11} - p_{12} - 2p_{22} & 4p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks diatas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut :

$$-4p_{21} = -1, \quad 2p_{11} - p_{12} - 2p_{22} = 0, \quad 4p_{12} - 2p_{22} = -1$$

Sehingga didapatkan nilai $p_{11} = \frac{9}{8},\ p_{12} = \frac{1}{4},\ p_{22} = 1$ dan dapat dibentuk sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks P adalah matriks definitif positif sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - P) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \tfrac{9}{8})(\lambda - 1) = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, $\lambda_2 = \frac{9}{8}$ dan $\lambda_2 = 1$

Dari matriks diatas didapat, $\lambda_1 = \frac{9}{8}$ dan $\lambda_2 = 1$, karena $\lambda_i > 0,\ i = 1{,}2$ maka dapat disimpulkan matrik diatas adalah matriks definit positif. Maka pada contoh 2.7 adalah stabil asimtotik.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian analisa kestabilan linier kuadratik waktu kontinu dengan aplikasi metode *Lyapunov*. penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka yang berguna untuk mengumpulkan informasi yang dibutuhkan baik berasal daribuku-buku, jurnal, maupun sumber-sember lainya.

Penulisan dimulai dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Dibentuk persamaan dinamik kontinu untuk dua kendali yaitu :
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}_1(t) + B_2\boldsymbol{u}_2(t)$$
dan bentuk umum fungsi tujuan waktu berhingga yaitu :
$$J_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(T_f)S_i(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(\boldsymbol{x}^T\, Q_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i{}^T R_i\boldsymbol{u}_i)dt, i = 1{,}2$$
2. Berdasarkan langkah ke-1, akan dibentuk fungsi kendali pertama dengan mengambil persamaan dinamik dan fungsi tujuan untuk kendali pertama, kemudian diamsumsikan fungsi kendali kedua yaitu :
$$\boldsymbol{u}_2(t) = -R_2^{-1}B_2^T S_2(t)\boldsymbol{x}(t).$$
3. Berdasarkan langkah ke-2, dibentuk persamaan Hamilton dengan persamaan sebagai berikut :
$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = L(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t) + \lambda^T(t)f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t).$$
4. Selanjutnya, dibentuk persamaan *state*, *kostate*, dan persamaan *stasioner* dari persamaan Hamilton.
5. Berdasarkan langkah ke-4, dibentuk persamaan Riccati.
6. Kemudian dicari solusi dari persamaan Riccati pada langkah ke-5.
7. Selanjutnya didapatkan fungsi kendali pertama yang menstabilkan persamaan dinamik dari solusi persamaan Riccati pada langkah ke-6.
8. Berdasarkan langkah ke-1, akan dibentuk fungsi kendali kedua dengan mengambil persamaan dinamik dan fungsi tujuan untuk kendali kedua dan kemudian diasumsikan fungsi kendali pertama yaitu :

$$\boldsymbol{u}_1(t) = -R_2^{-1}B_1^T S_1(t)\boldsymbol{x}(t)$$

9. Berdasarkan langkah ke-8, dibentuk persamaan Hamilton dengan persamaan sebagai berikut :

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = L(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t) + \lambda^T(t)f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)$$

10. Selanjutnya, dibentuk persamaan *state*, *kostate*, dan persamaan *stasioner* dari persamaan Hamilton.
11. Berdasarkan langkah ke-10, dibentuk persamaan Riccati.
12. Kemudian dicari solusi dari persamaan Riccati pada langkah ke-5.
13. Selanjutnya didapatkan fungsi kendali kedua yang menstabilkan persamaan dinamik dari solusi persamaan Riccati pada langkah ke-12.
14. Disubtitusikan fungsi kendali pertama dan fungsi kendali kedua yang baru diperoleh pada langkah ke-7 dan langkah ke-13 kepersamaan pada langkah ke-1 dinamik dan dianalisa kestabilan dengan metode *Lyapunov*.
15. Dibentuk contoh soal persamaan dinamik dan fungsi tujuan dua kendali, untuk dicari kendali pertama dan kendali kedua kemudian analisa kestabilannya dengan metode *Lyapunov*.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan pada Bab IV maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa dari persamaan diferensial sistem dinamik dua kendali untuk waktu kontinu, yaitu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t)$$

Dengan fungsi kendali objektif:

$$J_i = \frac{1}{2}x^T(T_f)S_i(T_f)x(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(x^T\, Q_ix + u_i{}^T R_iu_i)dt$$

Kemudian dari persamaan diferensial sistem dinamik dan fungsi tujuan dibentuk persamaan Hamilton, Persamaan State, Persamaan Kostate, dan Statisioner, selanjutnya didapatkan Persamaan Aljabar Riccati sebagai berikut:

$$0 = -A^TS_1 - S_1A + S_1B_2R_2^{-1}B_2^TS_2 + S_1B_1R_1^{-1}B_1^TS_1 - Q$$

Persamaan Aljabar Riccati tersebut dibentuk fungsi kendali pertama dan fungsi kendali kedua,

Fungsi kendali Pertama

$$u_1(t) = -R_1^{-1}B_1^TS_1(t)\boldsymbol{x}(t)$$

Fungsi kendali Kedua

$$u_2(t) = -R_2^{-1}B_2^TS_2(t)x(t)$$

Kemudian fungsi kendali pertama dan fungsi kendala kedua di subtitusikan ke persamaan diferensial sistem dinamik awal, maka di peroleh:

$$\dot{x}(t) = \left(A - B_1R_1^{-1}B_1^TS_1(t) - B_2R_2^{-1}B_2^TS_2(t)\right)\boldsymbol{x}(t)$$

Dan dianalisa kestabilannya menggunakan metode Lyapunov, maka diperoleh:

$$\left(A - B_1R_1^{-1}B_1^TS_1(t) - B_2R_2^{-1}B_2^TS_2(t)\right)^TP + P\left(A - B_1R_1^{-1}B_1^TS_1(t) - B_2R_2^{-1}B_2^TS_2(t)\right) = -Q$$

Berdasarakan dari hasil penyelesaian contoh 4.1 dan contoh 4.2 dengan hasil yang didapatkan:

Contoh 4.1

$$\lambda_1 = \frac{-30 + \sqrt{360}}{60} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-30 - \sqrt{360}}{60}$$

Contoh 4.2

$$\lambda_3 = \frac{-322 + \sqrt{55016}}{1058} \text{ dan } \lambda_4 = \frac{-322 - \sqrt{55016}}{1058}$$

maka sistem kedua contoh dapat disimpulkan tidak stabil karena:

$$\lambda_i < 0, i = 1,2, \dots ,4.$$

5.2 Saran

Tugas akhir ini memaparkan tentang persamaan dinamik dua kendali untuk kasus matriks, kemudian menguji kestabilan. Bagi para pembaca, khususnya mahasiswa jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau, penulis menyarankan pada penelitian selanjutnya untuk dapat mengembangkan lebih lanjut tentang persamaan dinamik dua kendali untuk kasus lainnya dalam waktu berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howart. " *Aljabar Linear Elementer ".* Edisi ke-5. Erlangga, 1997

Frank L. Lewis. " *Control Teory ".* Jhon Wiley & Sons, Inc. 1995

Jacob Engwerda. " *LQ Dynamic Optimation and Differential Games* ". Tilburg : Jhon wiley, 2005

Lina, Oktivia L. " *Pengunaan Metode Lyapunov Untuk Menguji Kestabilan Sistem Linier".* Padang : Universitas Andalas 2014.

Ogata, K. " *Discrette-Time Control Sistems ".* New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 1995.

Olsder, G.J. "*Mathematical Sistem Theory ".* Delft : University of Technologi. 1994.

Wahyudi. "Kestabilan Sistem Kendali Lingkar Terbuka Linier Kuadratik Untuk Waktu Tak Berhingga". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.*2015.

Zulfikar. "Persamaan Alajabar Riccati Pada Masalah Kendali Dengan Waktu Tak Berhingga" *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.*2016.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 28 Mei 1995 di Suka damai Ujungbatu, Sebagai anak pertama dari empat bersaudara pasangan bapak A. Laiya dan ibuk Jasnimar. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada Sekolah Dasar Negeri 006 Belutu ditahun 2007, Pada tahun 2010 menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Sekolah SMP Negeri 3 Ujung Batu dan melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Atas Negeri 2 Ujung Batu dengan jurusan IPA pada tahun 2013. Setelah menyelesaikan Pendidikan di SMA Negeri 2 Ujung Batu, Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dengan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Pada tahun 2018 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Lubuk Bendahara Timur Kecamatan Rokan IV Koto Kabupaten Rokan Hulu. Pada tahun 2017, tepat di semester tujuh penulis melaksanakan Kerja Praktek Di Kantor Dinas Kesehatan Riau dengan judul **"Deskriptif Jumlah Penderita Penyakit DBD Tahun 2014-2016 Di Kota Pekanbaru"** dibawah bimbingan ibu Sri Basriati, M.Sc.

Dan Pada tanggal 04 Agustus 2020 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul **" Kestabilan Model Linier Kuadratik Dengan Persamaan *Lyapunov* Pada Waktu Kontinu"** di bawah bimbingan Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.